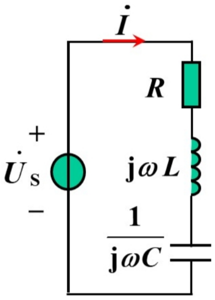
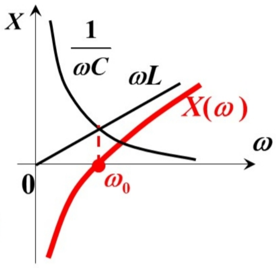
第7章 谐振电路

- 7.1 串联电路的谐振
  - **1.串联谐振条件**



$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$
$$= R + j(X_L - X_C)$$
$$= R + jX(\omega)$$
$$X(\omega_0) = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$



谐振的定义：对于任何含有电感和电容的一端口电路，在一定条件下可呈现电阻性，其端口电压与电流同相位，则称此一端口电路发生谐振。

串联电路发生谐振的条件：

$$X(\omega_0) = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ **谐振角频率，单位：rad/s**
(resonant angular frequency)

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$ **谐振频率，单位：Hz**
(resonant frequency)

①电路参数 LC 一定，改变电源的频率，使之与电路的固有谐振频率相等，则电路发生串联谐振。

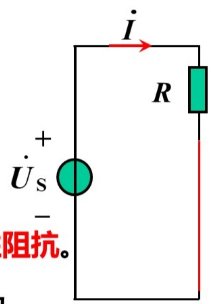
②电源频率一定，改变 L 或 C (通常改变C)，使电路固有频率与电源频率一致，电路发生串联谐振。

  - **2.串联谐振特点**

1)阻抗方面

$$Z_0 = R + jX(\omega_0) = R$$

谐振时，感抗与容抗相抵消，串联电路呈电阻性。当 $R \to 0$，谐振电路相当于短路。



①谐振时感抗和容抗称为RLC串联电路的特性阻抗。

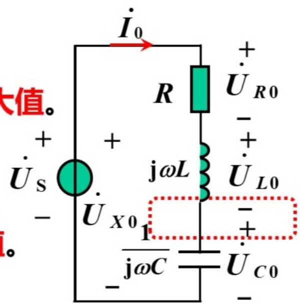
$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ **单位：欧姆**

②谐振时特性阻抗与电阻的比值称为RLC串联电路的品质因数(共振系数或Q值)。

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2)电流方面

谐振时，电路电流为 $\dot{I}_0=\dfrac{\dot{U}_S}{R}$ 达到最大值。

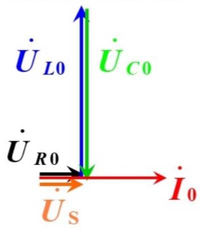


3)电压方面

谐振时，

$\dot{U}_{R0}=R\dot{I}_0=\dot{U}_S$ 电阻电压达到最大值。

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{L0}&=\mathrm{j}\omega_0L\dot{I}_0=\mathrm{j}\frac{\omega_0L}{R}\dot{U}_S=\mathrm{j}Q\dot{U}_S\\ \dot{U}_{C0}&=\frac{\dot{I}_0}{\mathrm{j}\omega_0C}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0CR}\dot{U}_S=-\mathrm{j}Q\dot{U}_S\end{aligned}\right\}\text{二者有效值相等}$$



L 和 *C* 上**可能**出现高电压，

串联谐振又称电压谐振。

- 3.串联谐振的能量分析

设谐振时电路电流为 $i=I_m\cos\omega_0t$

则电容电压为 $u_C=\dfrac{I_m}{\omega_0C}\cos(\omega_0t-\dfrac{\pi}{2})=U_{Cm}\sin\omega_0t$

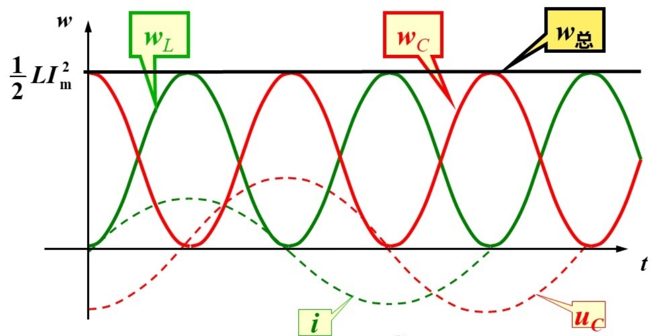
$$w=w_L+w_C=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}Cu_C^2=\underbrace{\frac{1}{2}LI_m^2\cos^2\omega_0t}_{\text{磁场能}}+\underbrace{\frac{1}{2}CU_{Cm}^2\sin^2\omega_0t}_{\text{电场能}}$$

$$U_{Cm}=\frac{I_m}{\omega_0C}=I_m\sqrt{\frac{L}{C}}$$

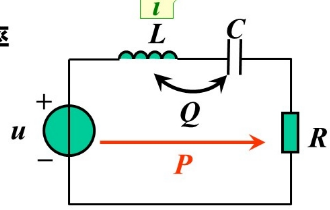
电场能量 $w_C=\dfrac{1}{2}CU_{Cm}^2\sin^2\omega_0t=\dfrac{1}{2}LI_{Lm}^2\sin^2\omega_0t$

电磁场总能量 $w=w_L+w_C=\dfrac{1}{2}LI_m^2=\dfrac{1}{2}CU_{Cm}^2$

磁场能量 $w_L=\dfrac{1}{2}LI_m^2\sin^2\omega_0t$ 电场能量 $w_C=\dfrac{1}{2}CU_{Cm}^2\cos^2\omega_0t$



谐振时的功率



由于 $U_{Cm}=QU_{Sm}$，所以 $w=\frac{1}{2}CU_{Cm}^2=\frac{1}{2}CQ^2U_{Sm}^2$

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\omega_0\frac{\frac{1}{2}LI_m^2}{\frac{1}{2}RI_m^2}=2\pi f_0\frac{\frac{1}{2}LI_m^2}{RI_0^2}=2\pi\frac{\frac{1}{2}LI_m^2}{RI_0^2T_0}$$

$$Q=2\pi\frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{电路在一个周期中消耗的能量}}$$

Q的定义1和定义2吻合

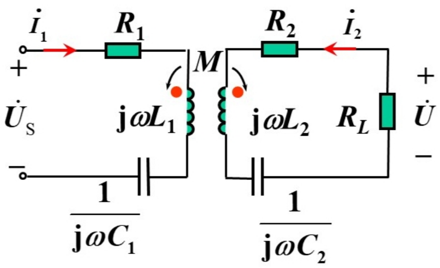
Q大 → 谐振时**储能**大，**消耗能量**少。

Q是反映谐振回路中电磁振荡程度的量。

串联电路的谐振应用

——磁耦合谐振式无线电能传输

2006 年麻省理工的研究小组提出的**磁耦合谐振式无线电能传输(MCR-WPT)**方式，能够实现中距离无线电能的传输。



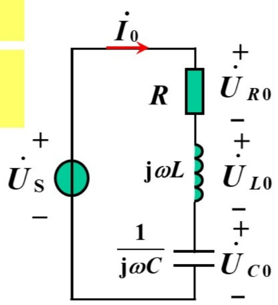
- 7.2 串联电路的谐振曲线
  - **1.谐振曲线**

定义1：在电路中，阻抗、电压、电流与频率之间的关系称为它们的频率特性。

定义2：在串联谐振电路中，描绘电压、电流与频率关系的曲线称为谐振曲线。

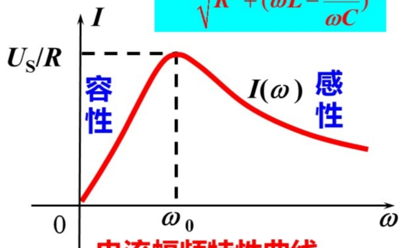
电流频率特性

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{Z}=\frac{\dot{U}_S}{R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}$$

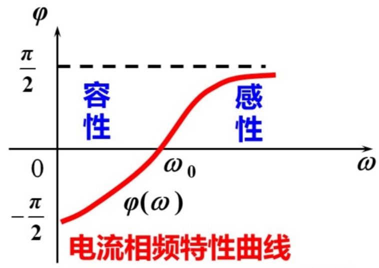


定义3：在反映电流有效值与频率的关系，称为电流的**幅频特性**；反映电流相位与频率的关系称为电流的**相频特性**。

幅频特性 $I=\dfrac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}$　　相频特性 $\varphi=\arctan\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}$



电流幅频特性曲线



电流相频特性曲线

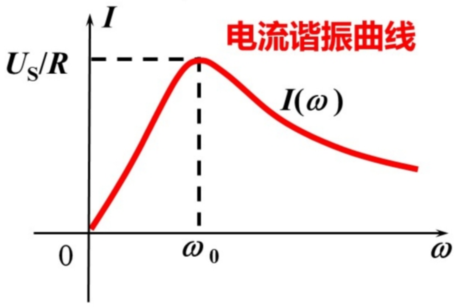
当$\omega=\omega_0$，电流最大，电压与电流同相位，电路处于**谐振状态**；

当$\omega\neq\omega_0$，$I<I_0$，$\varphi\neq 0$，电路处于**失谐振状态**；

ω偏离ω_0越远，I越小，$|\varphi|$越大，电路失谐越严重。

- 2.幅频特性

$$I(\omega)=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}\le\frac{U_S}{R}$$

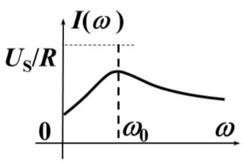


从电流谐振曲线可以看出，在谐振频率附近，电路具有较大电流，而外施信号频率偏离谐振频率越远，电流越小，这表现出了串联谐振电路具有选择最接近谐振频率信号，同时抑制其他信号的能力，称为**电路的选择性**。

如何由频率特性图直观判断品质因数的大小?

如何比较谐振频率不同、幅频特性最大幅值不同的两个谐振电路? 进行**归一化**处理!

希望： 谐振点处幅频特性的幅值都为1。在同一点发生谐振。



纵轴变量的归一化

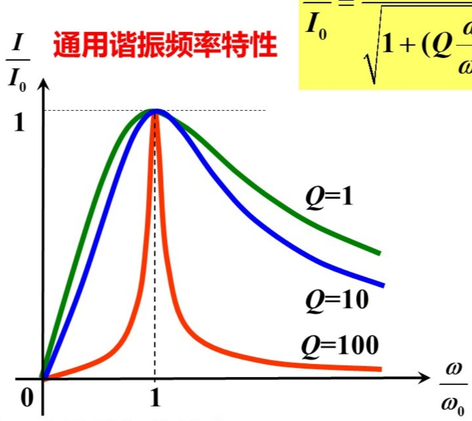
$$I(\omega)=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)}=\frac{U_S/|Z|}{U_S/R}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\omega L}{R}-\dfrac{1}{\omega RC})^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\omega_0 L}{R}\cdot\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{1}{\omega_0 RC}\cdot\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(Q\dfrac{\omega}{\omega_0}-Q\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

Q的定义1　　横轴变量的归一化

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+(Q\frac{\omega}{\omega_0}-Q\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$



Q大 ⟶ 归一化后电流谐振曲线尖
谐振电路的选择性好
对非谐振频率信号抑制能力强

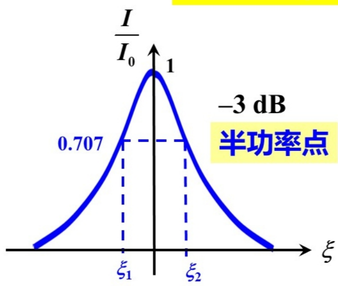
Q小 ⟶ 谐振曲线平缓
谐振电路的选择性差

- 3.通频带

$$\xi=\frac{X}{R}=Q(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})$$

令 $\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

则 $\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$



实际电路中，ω 和 ω_0相差不大，整理可得

$$\omega_1=\omega_0(1-\frac{1}{2Q})\quad \omega_2=\omega_0(1+\frac{1}{2Q})$$

则 $B_\omega=\omega_2-\omega_1=\frac{\omega_0}{Q}$ 或 $B_f=f_2-f_1=\frac{f_0}{Q}$

如果信号占有的频带在谐振曲线最大值$1/\sqrt{2}$ 倍的两点之间，这两点之间的频率范围称为谐振电路的通频带。通频带的边界两点，对应于信号最大功率的一半，也称为半功率点。

品质因数Q定义的归纳

➢ 从信号幅值的变化来衡量 $Q\overset{\text{def}_1}{=}\frac{U_{L0}}{U_S}=\frac{U_{C0}}{U_S}$

Q大 ⟶ 谐振时电容电压和电感电压大。

➢ 从电磁能量的转换来衡量

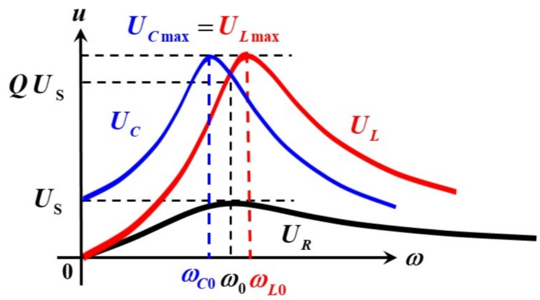
$$Q\overset{\text{def}_2}{=}2\pi\frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$$

Q大 ⟶ 谐振时储能大，消耗能量少。

➢ 从频率特性的形状来衡量 $Q\overset{\text{def}_3}{=}\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}$

Q大 ⟶ 谐振电路的选择性好

- 4.电压谐振曲线

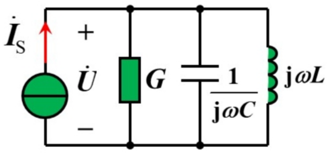


$$U_R = IR = \frac{U_S}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C}I = \frac{U_S}{\omega CR\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}} \qquad U_L = \omega LI = \frac{\omega LU_S}{R\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

- 7.3 并联电路的谐振
  - **1.理想GCL并联谐振电路**

1） 并联谐振条件



***GCL*并联电路的复导纳为**

$$Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + jB$$

实现谐振的条件是导纳的虚部为零

$$\mathrm{Im}[Y] = \mathrm{Im}[G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})] = 0 \ \text{即} \ \omega C = \frac{1}{\omega L}$$

谐振角频率为 $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$

谐振频率为 $f_p = 1/2\pi\sqrt{LC}$

2)并联谐振的特点

①导纳方面

$$Y_p = G + j(\omega_p C - \frac{1}{\omega_p L}) = G = \frac{1}{R}$$

谐振时，导纳有最小值。当$G \to 0$，谐振电路相当于开路。

②电压方面

在总电流有效值一定的条件下，并联电压达到最大

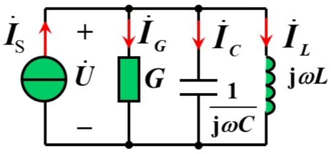
$$\dot{U}_p = \dot{I}_S / Y = \dot{I}_S / G$$

③电流方面

谐振时的容纳（或感纳）与电导的比值称为*GLC*并联电路的品质因数(共振系数或Q值)。

$$Q_p = \frac{\omega_p C}{G} = \frac{1}{\omega_p LG} \quad \text{进而有} \quad Q = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

在电导、电感和电容中电流

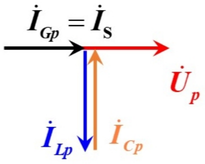


$$\dot I_{Gp}=G\dot U_p=\dot I_S$$

$$\dot I_{Lp}=\frac{\dot U_p}{j\omega_p L}=-j\frac{\dot I_S}{\omega_p LG}=-jQ_p\dot I_S$$

$$\dot I_{Cp}=j\omega_p C\dot U_p=\frac{j\omega_p C\dot I_S}{G}=jQ_p\dot I_S$$

二者相等

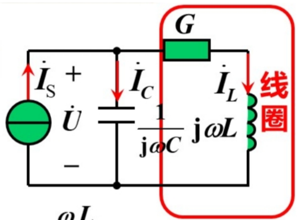


谐振时电容支路和电感支路的电流**有效值相同**，都等于总电流的Q倍，但是**方向相反**。

L 和 C 上**可能**出现大电流，**并联谐振又称电流谐振。**

- 2.电感线圈和电容器构成并联谐振电路，即RL与C并联谐振电路

1） 谐振条件



电路模型如右图，等效复导纳为

$$Y=\frac{1}{R+j\omega L}+j\omega C=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+j[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}]$$

产生谐振的条件是导纳的虚部为零。因此谐振时

$$\omega C=\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

当改变频率时，可得谐振角频率

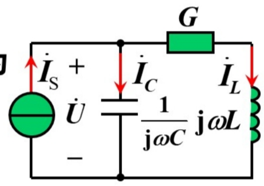
$$\omega_p=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{L}}$$

（当 $R<\sqrt{L/C}$ 时存在）

$R\ll\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时， $\omega_P\approx\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad f_P\approx\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

5

2)RL与C 并联谐振的特点

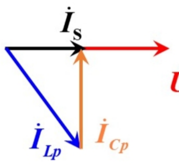


谐振时其等效阻抗为一个电阻，记为

$$R_p=\frac{R^2+(\omega_p L)^2}{R}$$

将谐振角频率代入上式得

$$R_p=R+\frac{L^2}{R}\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}\right)=\frac{L}{RC}$$



$$\dot U_p=\dot I/Y=\dot I/G=R_p\dot I_S=\frac{L}{RC}\dot I_S$$

$$\dot I_{Cp}=j\omega_p C\dot U_p=j\omega_p C\frac{L}{CR}\dot I_S=j\frac{\omega_p L}{R}\dot I_S$$

$$\dot I_{Lp}=\dot I_S-\dot I_{Cp}=\dot I_S-j\frac{\omega_p L}{R}\dot I_S$$

当 $R\ll\sqrt{\frac{L}{C}}$,由于 $\omega_p\approx\frac{1}{\sqrt{LC}}$,

因而有$\omega_p L\approx\sqrt{\frac{L}{C}}\gg R$，故此时 $\dot I_{Lp}\approx -j\frac{\omega_p L}{R}\dot I_S$，所以 $I_{Cp}\approx I_{Lp}\gg I_S$ 。